

WOJCIECH MELLER

ZADANIA KONTROLNE

wydanie internetowe

www.teoriaobwodow.edu.pl

© Copyright Wojciech Meller 2013

Wstęp

W podręczniku „Metody analizy obwodów liniowych” Wyd. ATR 2003 opublikowane zostały zadania kontrolne. W niniejszym opracowaniu oprócz treści zadań przedstawiono rozwiązania przykładowych zadań. Należy mieć na uwadze, że w tekście znajdują się odwołania do pewnych podrozdziałów podręcznika.

Zadania te zostały pomyślane jako pomoc dydaktyczna do ćwiczeń z teorii obwodów. Wielowariantowość zadań polega na zróżnicowaniu zawartości gałęzi (w pewnych zadaniach prowadzi to do zmiany struktury) przy jednakowych parametrach elementów. Realizacja tej samej metody analizy w każdym wariantcie prowadzi do tworzenia oryginalnych zależności. Taka sytuacja zachęca do samodzielnej pracy nad własnym wariantem. Rozwiązanie zadania wymaga obok umiejętności stosowania narzuconych metod analizy także poprawności w obliczeniach. Pewnej koncentracji wymaga też etap tworzenia schematu dla danego wariantu.

Zadania nr 1 i nr 2 dotyczą analizy obwodu prądu stałego. Obwód w zadaniu nr 2 powstaje po dodaniu źródła sterowanego do obwodu z zadania nr 1.

W zadaniu nr 3 należy obliczyć odpowiedzi w obwodzie prądu sinusoidalnego.

Następne zadania dotyczą analizy stanu nieustalonego w obwodzie z zadania nr 3 po przełączeniu zasilania ze źródła napięcia sinusoidalnego na źródło napięcia stałego. Zadania nr 4 i 5 przewidują analizę w dziedzinie czasu, a w zadaniu nr 5 należy posłużyć się metodą operatorową.

Zadania mogą być przydatne również dla samokształcenia. W zadaniach nr 1, 2 i 3 pewne odpowiedzi obwodu są wyznaczane niezależnie różnymi metodami. Przy poprawnym rozwiązaniu wyniki powinny być jednakowe. W tym sensie można też porównywać wyniki zadania nr 5 (dla którego zadanie nr 4 stanowi część wstępną) z wynikami zadania nr 6.

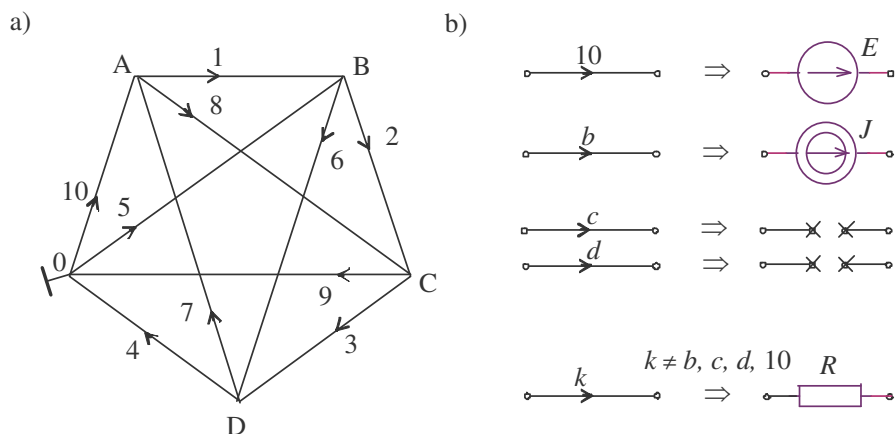
Spis treści

Część I.	3
1. Zadanie kontrolne nr 1	3
2. Zadanie kontrolne nr 2	4
3. Zadanie kontrolne nr 3	4
4. Zadanie kontrolne nr 4	5
5. Zadanie kontrolne nr 5	5
6. Zadanie kontrolne nr 6	6
Część II.	7
1. Przykład rozwiązania zadania kontrolnego nr 1	7
2. Przykład rozwiązania zadania kontrolnego nr 2	12
3. Przykład rozwiązania zadania kontrolnego nr 3	15
4. Przykład rozwiązania zadania kontrolnego nr 4	19
5. Przykład rozwiązania zadania kontrolnego nr 5	21
6. Przykład rozwiązania zadania kontrolnego nr 6	23

Część I

1. Zadanie kontrolne nr 1

Przedstawić schemat obwodu o podanej strukturze, numeracji gałęzi oraz kierunkach umownych prądów w gałęziach (rys. Z.1-1a). Zawartość gałęzi uzależniona jest od numeru gałęzi (rys. Z.1-1b). Przyporządkowanie poszczególnym wariantom numerów gałęzi: b, c, d, f oraz g wynika z tabeli Z.1-1.



Rys. Z.1-1

Dane: $E = 2 \text{ V}$, $J = 1 \text{ A}$, $R = 1 \Omega$

Tabela Z.1-1

nr	b	c	d	f	g
1	1	2	4	8	3
2	1	2	7	8	3
3	1	3	5	8	2
4	1	4	8	7	2
5	1	5	7	8	2
6	1	5	8	7	2
7	1	6	8	7	2
8	1	6	9	8	2
9	1	7	9	8	2
10	2	1	3	8	4
11	2	1	4	8	3
12	2	1	9	8	3
13	2	3	5	8	4
14	2	4	8	7	3
15	2	5	7	8	3
16	2	5	8	7	3
17	2	6	8	7	3
18	2	6	9	8	3
19	2	7	9	8	3
20	3	1	4	8	2
21	3	1	9	8	2
22	3	2	4	8	5
23	3	2	7	8	4
24	3	4	8	7	2
25	3	5	7	8	2
26	3	5	8	7	2
27	3	6	8	7	2
28	3	6	9	8	2
29	3	7	9	8	2
30	4	1	3	8	2
31	4	1	9	8	2
32	4	2	7	8	3
33	4	3	5	8	2
34	4	5	7	8	2
35	4	5	8	7	2
36	4	6	8	7	2
37	4	6	9	8	2
38	4	7	9	8	2
39	5	1	3	8	2
40	5	1	4	8	2
41	5	1	9	8	2
42	5	2	4	8	3
43	5	2	7	8	3
44	5	4	8	7	2
45	5	6	8	7	2
46	5	6	9	8	2
47	5	7	9	8	2
48	6	1	3	8	2
49	6	1	4	8	2
50	6	1	9	8	2
51	6	2	4	8	3
52	6	2	7	8	3
53	6	3	5	8	2
54	6	4	8	7	2
55	6	5	7	8	2
56	6	5	8	7	2
57	6	7	9	8	2
58	7	1	3	8	2
59	7	1	4	8	2
60	7	1	9	8	2
61	7	2	4	8	3
62	7	3	5	8	2
63	7	4	8	6	2
64	7	5	8	6	2
65	7	6	8	5	2
66	7	6	9	8	2
67	8	1	3	7	2
68	8	1	4	7	2
69	8	1	9	7	2
70	8	2	4	7	3
71	8	2	7	6	3
72	8	3	5	7	2
73	8	5	7	6	2
74	8	6	9	7	2
75	8	7	9	6	2
76	9	1	3	8	2
77	9	1	4	8	2
78	9	2	4	8	3
79	9	2	7	8	3
80	9	3	5	8	2
81	9	4	8	7	2
82	9	5	7	8	2
83	9	5	8	7	2
84	9	6	8	7	2

Należy wyznaczyć:

- metodą superpozycji prądy I_f oraz I_{10} (składowe obliczyć metodą kolejnych przekształceń),
- metodą Thevenina prąd I_f ,
- metodą Nortona prąd I_g ,

- d) metoda prądów oczkowych prądy oczkowe oraz prądy I_f, I_g, I_{10} ,
 e) metodą potencjałów węzłowych potencjały U_{B0}, U_{C0}, U_{D0} oraz prądy I_f, I_g, I_{10} ,
 f) sumę mocy rezystorów i źródeł.

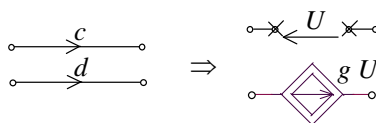
W punktach d) i e) nie należy przekształcać obwodu przed utworzeniem układów równań.

Na grafie obwodu (w postaci jak na rysunku Z.1-1a, ale bez gałęzi c i d) przedstawić rozptyw prądów oraz rozkład potencjałów.

Dopuszczalny błąd obliczeń wynosi: dla prądów 0,01 A, dla napięć 0,01 V. W trakcie obliczeń nie należy zmieniać oznaczeń węzłów i gałęzi.

2. Zadanie kontrolne nr 2

Do obwodu analizowanego w zadaniu kontrolnym nr 1 dołączono źródło prądu sterowane napięciem. W rezultacie gałęzie c i d przybierają postać jak na rysunku Z.2-1.



Rys. Z.2-1

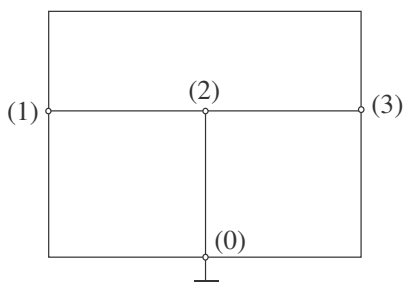
Parametr $g = 0,6 \text{ S}$.

Należy wyznaczyć:

- metodą potencjałów węzłowych wszystkie potencjały oraz prąd I_f ,
- metodą prądów oczkowych prąd I_f ,
- metodą Thevenina prąd I_f .

3. Zadanie kontrolne nr 3

Struktura i numeracja węzłów zadanego obwodu pokazana jest na rysunku Z.3-1.



Rys. Z.3-1

W gałęziach obwodu znajdują się elementy przedstawione na rysunku Z.3-2. Przy zaciskach elementów podano oznaczenia węzłów, do których elementy są dołączone. Numery węzłów kryjące się pod tymi oznaczeniami podane są dla poszczególnych numerów wariantów w tabeli Z.3-1 (p. str. 6) w postaci par wartości ab, cd, ef, gh, kl, mn, pr. Wśród numerów węzłów wymienionych w tabeli występuje nr 4. Jest to oznaczenie węzła wewnętrznego jednej z gałęzi, którą tworzy połączenie szeregowe dwóch elementów.

Dane:

$$e(t) = E_m \sin(2\pi f t)$$

$$E_m = 10 \text{ V}, f = 1 \text{ kHz}$$

$$R_1 = R_2 = R_3 = 1 \text{ k}\Omega$$

$$L = 0,2 \text{ H}$$

$$C = 0,1 \text{ }\mu\text{F}$$

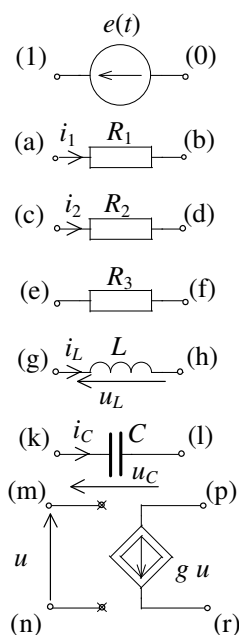
$$g = 0,5 \text{ mS}$$

Po narysowaniu schematu obwodu zgodnego z numerem wariantu należy:

1. Przeprowadzić analizę obwodu metodą potencjałów węzłowych, a następnie:

- wyznaczyć równania wartości chwilowych $i_1(t)$ oraz $i_2(t)$,
- sporządzić wykres wskazowy prądów i wszystkich napięć.

Napięcia na wykresie przedstawić w układzie topograficznym, a prądy w sposób ilustrujący spełnienie I PK w węzłach 2 i 3. Przyjąć skalę, wg której napięciu 1 V oraz prądowi 1 mA odpowiada odcinek o tej samej długości.



Rys. Z.3-2

- określić analitycznie oraz graficznie moment czasu (pierwszy po $t = 0$), w którym wartości chwilowe potencjałów węzłów 2 i 3 są jednakowe.

Sposób graficzny: Narysować przebiegi $u_{20}(t)$ i $u_{30}(t)$ we wspólnym układzie współrzędnych. Przyjąć zakres czasu od $-0,2$ do $+1$ ms. Oznaczyć odpowiedni punkt przecięcia sinusoid i określić jego współrzędną na osi czasu.

2. Posługując się zasadą Thevenina wyznaczyć przebieg prądu $i_1(t)$.

Obliczenia należy prowadzić z taką dokładnością, aby błąd bezwzględny wyników końcowych nie przekraczał: 0,01 V dla amplitud napięć, 0,01 mA dla amplitud prądów, $0,1^\circ$ dla faz początkowych i 0,01 ms dla czasu.

4. Zadanie kontrolne nr 4

Przyjąć, że w obwodzie analizowanym w zadaniu kontrolnym nr 3 panuje do chwili $t = 0$ stan ustalony. W momencie $t = 0$ następuje zamiana wymuszenia sinusoidalnego na wymuszenia stałe o napięciu źródłowym $e(t) = E = 10 \text{ V}$.

Korzystając z rezultatów analizy stanu ustalonego, przeprowadzonej w zadaniu kontrolnym nr 3, wyznaczyć warunki początkowe, a następnie:

$$u_L(0^+), i_C(0^+), \frac{du_L}{dt}(0^+), \frac{di_C}{dt}(0^+).$$

Kierunki umowne odpowiedzi podano w zadaniu kontrolnym nr 3.

5. Zadanie kontrolne nr 5

Wyznaczyć przebiegi napięć $u_C(t)$ oraz $u_L(t)$, po komutacji w obwodzie opisanym w zadaniu kontrolnym nr 4.

Analizę przeprowadzić w dziedzinie czasu z wykorzystaniem wartości początkowych uzyskanych w poprzednim zadaniu.

6. Zadanie kontrolne nr 6

Przyjąć, że w obwodzie analizowanym w zadaniu kontrolnym nr 3 panuje do chwili $t = 0$ stan ustalony. W momencie $t = 0$ następuje zamiana wymuszenia sinusoidalnego na wymuszenia stałe o napięciu źródłowym $e(t) = E = 10\text{ V}$.

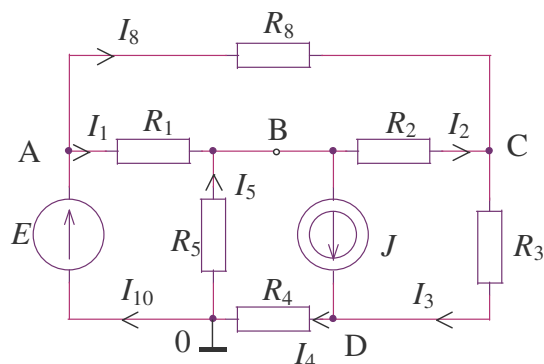
Metodą operatorową wyznaczyć przebieg napięcia na kondensatorze C : $u_C(t)$ oraz prądu przez rezystor R_1 : $i_1(t)$. Transformaty odpowiedzi podać w postaci unormowanej, tzn. ze współczynnikiem przy najwyższej potęgze zmiennej zespolonej s w mianowniku równym jedności.

Tabela Z.3-1

nr	ab	cd	ef	gh	kl	mn	pr	nr	ab	cd	ef	gh	kl	mn	pr	nr	ab	cd	ef	gh	kl	mn	pr
1	20	30	43	41	12	20	32	55	12	32	43	31	40	30	20	109	30	12	43	20	42	30	31
2	20	30	43	41	12	30	32	56	12	32	43	31	40	31	20	110	30	12	43	20	42	12	31
3	20	30	43	41	12	31	32	57	12	32	42	40	31	12	30	111	30	12	43	20	42	32	31
4	20	30	43	41	12	12	32	58	12	32	42	40	31	32	30	112	30	12	43	20	42	20	31
5	20	30	43	12	41	20	32	59	12	32	42	40	31	20	30	113	30	31	43	42	20	30	12
6	20	30	43	12	41	30	32	60	12	32	42	40	31	31	30	114	30	31	43	42	20	31	12
7	20	30	43	12	41	31	32	61	12	32	42	31	40	12	30	115	30	31	43	42	20	32	12
8	20	30	43	12	41	12	32	62	12	32	42	31	40	32	30	116	30	31	43	42	20	20	12
9	32	30	43	41	12	32	20	63	12	32	42	31	40	20	30	117	30	31	43	20	42	30	12
10	32	30	43	41	12	30	20	64	12	32	42	31	40	31	30	118	30	31	43	20	42	31	12
11	32	30	43	41	12	31	20	65	12	32	42	40	30	12	31	119	30	31	43	20	42	32	12
12	32	30	43	41	12	12	20	66	12	32	42	40	30	32	31	120	30	31	43	20	42	20	12
13	32	30	43	12	41	32	20	67	12	32	42	40	30	20	31	121	30	31	41	42	20	30	32
14	32	30	43	12	41	30	20	68	12	32	42	40	30	30	31	122	30	31	41	42	20	31	32
15	32	30	43	12	41	31	20	69	12	32	42	30	40	12	31	123	30	31	41	42	20	12	32
16	32	30	43	12	41	12	20	70	12	32	42	30	40	32	31	124	30	31	41	42	20	20	32
17	32	20	43	41	12	32	30	71	12	32	42	30	40	20	31	125	30	31	41	20	42	30	32
18	32	20	43	41	12	20	30	72	12	32	42	30	40	30	31	126	30	31	41	20	42	31	32
19	32	20	43	41	12	31	30	73	31	32	42	40	30	31	12	127	30	31	41	20	42	12	32
20	32	20	43	41	12	12	30	74	31	32	42	40	30	32	12	128	30	31	41	20	42	20	32
21	32	20	43	12	41	32	30	75	31	32	42	40	30	20	12	129	30	31	41	42	32	30	20
22	32	20	43	12	41	20	30	76	31	32	42	40	30	30	12	130	30	31	41	42	32	31	20
23	32	20	43	12	41	31	30	77	31	32	42	30	40	31	12	131	30	31	41	42	32	12	20
24	32	20	43	12	41	12	30	78	31	32	42	30	40	32	12	132	30	31	41	42	32	32	20
25	32	20	43	40	12	32	31	79	31	32	42	30	40	20	12	133	30	31	41	32	42	30	20
26	32	20	43	40	12	20	31	80	31	32	42	30	40	30	12	134	30	31	41	32	42	31	20
27	32	20	43	40	12	30	31	81	31	12	42	40	30	31	32	135	30	31	41	32	42	12	20
28	32	20	43	40	12	12	31	82	31	12	42	40	30	12	32	136	30	31	41	32	42	32	20
29	32	20	43	12	40	32	31	83	31	12	42	40	30	20	32	137	20	31	41	42	32	20	30
30	32	20	43	12	40	20	31	84	31	12	42	40	30	30	32	138	20	31	41	42	32	31	30
31	32	20	43	12	40	30	31	85	31	12	42	30	40	31	32	139	20	31	41	42	32	12	30
32	32	20	43	12	40	12	31	86	31	12	42	30	40	12	32	140	20	31	41	42	32	32	30
33	32	20	43	40	31	32	12	87	31	12	42	30	40	20	32	141	20	31	41	32	42	20	30
34	32	20	43	40	31	20	12	88	31	12	42	30	40	30	32	142	20	31	41	32	42	31	30
35	32	20	43	40	31	30	12	89	31	12	43	42	30	31	20	143	20	31	41	32	42	12	30
36	32	20	43	40	31	31	12	90	31	12	43	42	30	12	20	144	20	31	41	32	42	32	30
37	32	20	43	31	40	32	12	91	31	12	43	42	30	32	20	145	20	30	41	42	32	20	31
38	32	20	43	31	40	20	12	92	31	12	43	42	30	30	20	146	20	30	41	42	32	30	31
39	32	20	43	31	40	30	12	93	31	12	43	30	42	31	20	147	20	30	41	42	32	12	31
40	32	20	43	31	40	31	12	94	31	12	43	30	42	12	20	148	20	30	41	42	32	32	31
41	12	20	43	40	31	12	32	95	31	12	43	30	42	32	20	149	20	30	41	32	42	20	31
42	12	20	43	40	31	20	32	96	31	12	43	30	42	30	20	150	20	30	41	32	42	30	31
43	12	20	43	40	31	30	32	97	31	12	43	42	20	31	30	151	20	30	41	32	42	12	31
44	12	20	43	40	31	31	32	98	31	12	43	42	20	12	30	152	20	30	41	32	42	32	31
45	12	20	43	31	40	12	32	99	31	12	43	42	20	32	30	153	20	30	43	41	32	20	12
46	12	20	43	31	40	20	32	100	31	12	43	42	20	20	30	154	20	30	43	41	32	30	12
47	12	20	43	31	40	30	32	101	31	12	43	20	42	31	30	155	20	30	43	41	32	31	12
48	12	20	43	31	40	31	32	102	31	12	43	20	42	12	30	156	20	30	43	41	32	32	12
49	12	32	43	40	31	12	20	103	31	12	43	20	42	32	30	157	20	30	43	32	41	20	12
50	12	32	43	40	31	32	20	104	31	12	43	20	42	20	30	158	20	30	43	32	41	30	12
51	12	32	43	40	31	30	20	105	30	12	43	42	20	30	31	159	20	30	43	32	41	31	12
52	12	32	43	40	31	31	20	106	30	12	43	42	20	12	31	160	20	30	43	32	41	32	12
53	12	32	43	31	40	12	20	107	30	12	43	42	20	32	31								
54	12	32	43	31	40	32	20	108	30	12	43	42	20	20	31								

Część II

1. Przykład rozwiązania zadania kontrolnego nr 1 (wariant 57)



Rys. Z1-2

Z tabeli Z.1-1 odczytujemy numery gałęzi: $b = 6$, $c = 7$, $d = 9$, $f = 8$ i $g = 2$. Następnie w gałęziach grafu (rys. Z.1-1a) umieszczamy odpowiednie elementy (rys. Z.1-1b). Gałęzie o numerach c i d można pominąć, ponieważ przedstawiają sobie przerwę. Otrzymujemy schemat pokazany (w postaci planarnej) na rysunku Z.1-2. Zaznaczamy poszukiwane odpowiedzi: $I_f = I_8$, $I_g = I_2$ oraz I_{10} .

Parametry elementów:

$$E = 2 \text{ V} \quad J = 1 \text{ A}$$

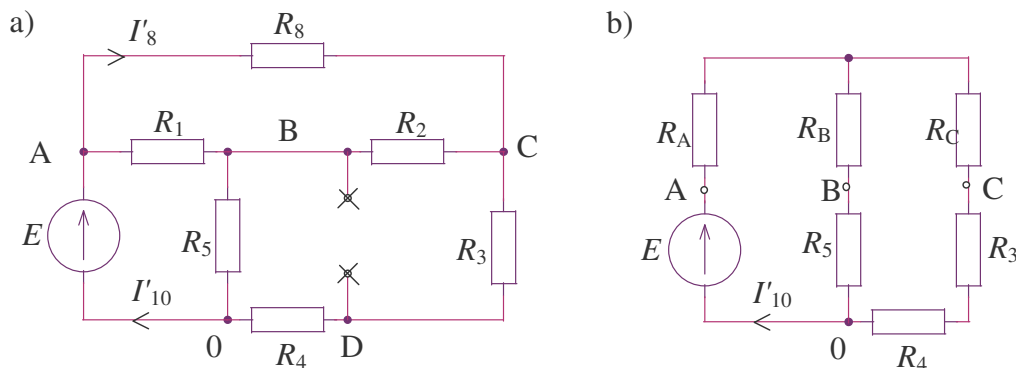
$$R_k = 1 \Omega \quad (k = 1, 2, 3, 4, 5, 8)$$

a) Metodą superpozycji wyznaczmy prądy $I_f = I_8$ oraz I_{10} .

W obwodzie na rys. Z1-3a działa tylko wymuszenie napięciowe. Po dokonaniu zamiany trójkąta rezystorów R_1, R_2, R_8 , na równoważną gwiazdę R_A, R_B, R_C o jednakowych rezystancjach:

$$R_A = R_B = R_C = \frac{R \cdot R}{R + R + R} = \frac{R}{3} = 0,333 \Omega$$

otrzymujemy obwód pokazany na rys. Z1-3b.



Rys. Z1-3

Rezystancja dołączona do źródła:

$$R_z = R_A + (R_B + R_5) \parallel (R_C + R_3 + R_4) = 0,333 + \frac{1,333 \cdot 2,333}{1,333 + 2,333} = 1,182 \Omega$$

Prąd płynący przez źródło:
$$I'_{10} = \frac{E}{R_z} = \frac{2}{1,182} = 1,692 \text{ A}$$

Napięcie na rezystorze R_8 :

$$U'_{AC} = I'_{10} \cdot R_A + I'_{10} \cdot \frac{R_B + R_5}{R_B + R_5 + R_C + R_3 + R_4} \cdot R_C =$$

$$= 1,692 \cdot \left(0,333 + \frac{1,333 \cdot 0,333}{1,333 + 2,333} \right) = 0,769 \text{ V}$$

Prąd I'_8 :
$$I'_8 = \frac{U'_{AC}}{R_8} = 0,769 \text{ A}$$

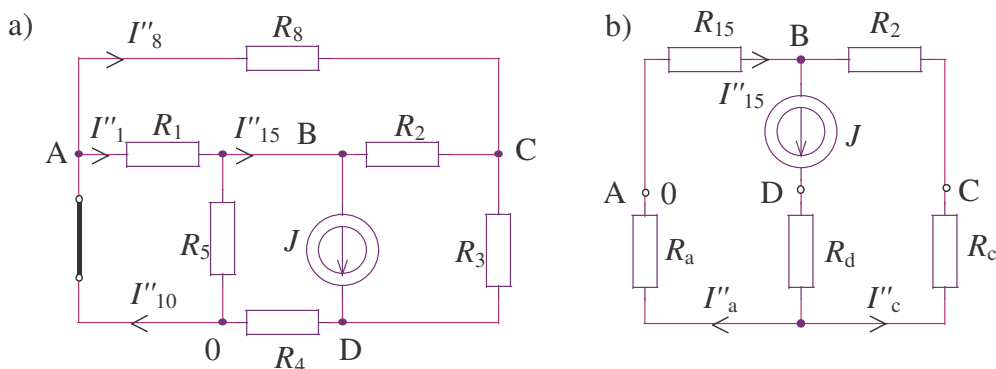
W obwodzie na rys. Z1-4a działa tylko wymuszenie prądowe.

Rezystory R_1 i R_5 są połączone równolegle. Rezystancja równoważna $R_{15} = 0,5 \Omega$.

Dokonyjemy zamiany trójkąta rezystorów R_3, R_4, R_8 , na równoważną gwiazdę R_a, R_c, R_d :

$$R_a = R_c = R_d = \frac{R \cdot R}{R + R + R} = \frac{R}{3} = 0,333 \Omega$$

Obwód po przekształceniach pokazano na rys. Z1-4b.



Rys. Z1-4

Prądy:
$$I''_a = I''_{15} = J \cdot \frac{R_c + R_2}{R_c + R_2 + R_a + R_{15}} = 1 \cdot \frac{1,333}{1,333 + 0,833} = 0,615 \text{ A}$$

$$I''_c = J - I''_a = 0,385 \text{ A} \quad I''_1 = I''_{15} \cdot \frac{R_5}{R_5 + R_1} = 0,615 \cdot \frac{1}{1+1} = 0,308 \text{ A}$$

Napięcie i prąd rezystora R_8 :

$$U''_{AC} = I''_a \cdot R_{15} - I''_c \cdot R_2 = 0,615 \cdot 0,5 - 0,385 \cdot 1 = -0,077 \text{ V} \quad I''_8 = \frac{U''_{AC}}{R_8} = -0,077 \text{ A}$$

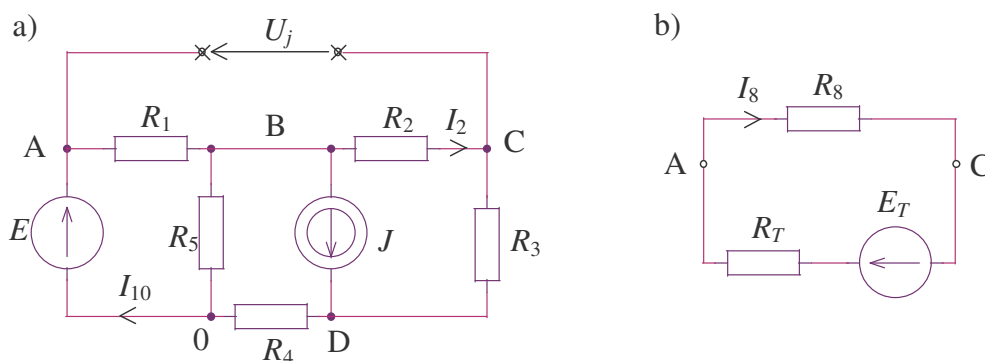
Prąd w gałęzi 10:
$$I''_{10} = I''_1 + I''_8 = 0,308 - 0,077 = 0,231 \text{ A}$$

Po nałożeniu składowych otrzymujemy odpowiedzi całkowite:

$$I_8 = I'_8 + I''_8 = 0,769 - 0,077 = 0,692 \text{ A} \quad I_{10} = I'_{10} + I''_{10} = 1,692 + 0,231 = 1,923 \text{ A}$$

b) Metodą Thevenina wyznaczmy prąd $I_f = I_8$.

Wyznaczać będziemy parametry zastępcze E_T oraz R_T dwójnika przedstawionego (w stanie jałowym) na rys. Z1-5a.



Rys. Z1-5

Po założeniu $E = 0$ oraz $J = 0$ rezystancja między punktami A i C:

$$R_T = (R_3 + R_4) \parallel (R_2 + R_1 \parallel R_5) \quad R_T = \frac{2 \cdot 1,5}{3,5} = 0,857 \Omega$$

Następnie obliczymy napięcie U_j (między A i C) metodą superpozycji.

W celu wyznaczenia składowej U'_j pochodzącej od źródła napięcia E określamy rezystancję zastępczą i prąd przez źródło:

$$R_z = R_1 + R_5 \parallel (R_2 + R_3 + R_4) = 1 + \frac{1 \cdot 3}{4} = 1,75 \Omega \quad I'_{10} = \frac{E}{R_z} = 1,143 \text{ A}$$

Z dzielnika prądowego wynika wartość prądu I'_2 :

$$I'_2 = I'_{10} \cdot \frac{R_5}{R_5 + R_2 + R_3 + R_4} = 1,143 \cdot \frac{1}{4} = 0,286 \text{ A}$$

Składowa napięcia U'_j :

$$U'_j = I'_{10} \cdot R_1 + I'_2 \cdot R_2 = 1,429 \text{ V}$$

Jeśli działa tylko źródło prądu J w obwodzie płyną prądy:

$$I''_2 = -J \cdot \frac{R_4 + R_1 \parallel R_5}{R_2 + R_3 + R_4 + R_1 \parallel R_5} = -1 \cdot \frac{1,5}{2 + 1,5} = -0,429 \text{ A}$$

$$I''_{10} = (J + I''_2) \cdot \frac{R_5}{R_1 + R_5} = (1 - 0,429) \cdot \frac{1}{2} = 0,286 \text{ A}$$

Składowa napięcia U''_j :

$$U''_j = I''_{10} \cdot R_1 + I''_2 \cdot R_2 = -0,143 \text{ V}$$

Napięcie źródłowe E_T :

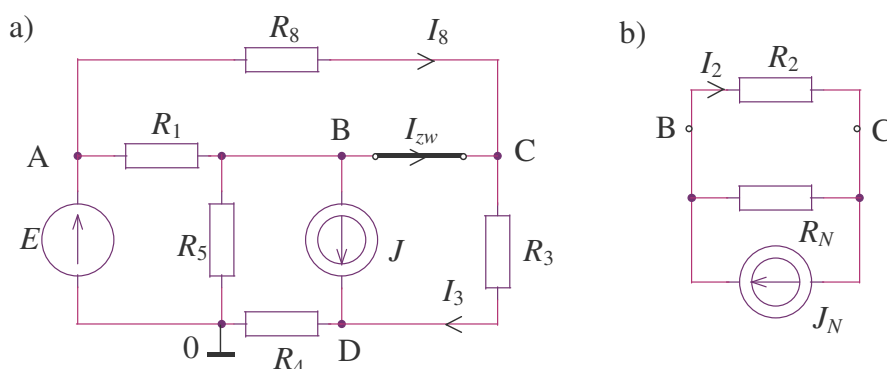
$$E_T = U'_j + U''_j = 1,286 \text{ V}$$

Poszukiwany prąd I_8 (rys. Z1-5b):

$$I_8 = \frac{E_T}{R_T + R_8} = \frac{1,286}{0,857 + 1} = 0,692 \text{ A}$$

c) Metodą Nortona wyznaczmy prąd $I_g = I_2$.

Wyznaczać będziemy parametry zastępcze J_N oraz R_N dwójnika przedstawionego (w stanie zwarcia) na rys. Z1-6a.



Rys. Z1-6

Po założeniu $E = 0$ oraz $J = 0$ rezystancja między punktami B i C:

$$R_N = R_1 \parallel R_5 + (R_3 + R_4) \parallel R_8 \quad R_N = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = 1,167 \Omega$$

Postępując się metodą potencjałów węzłowych obliczymy prąd zwarcia dwójnika I_{zw} .

Po uwzględnieniu, że $U_{B0} = U_{C0}$ oraz $U_{A0} = E$ otrzymujemy:

$$\begin{cases} U_{B0} \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_8} \right) + U_{D0} \cdot \left(-\frac{1}{R_3} \right) + E \cdot \left(-\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_8} \right) = -J \\ U_{B0} \cdot \left(-\frac{1}{R_3} \right) + U_{D0} \cdot \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \right) + E \cdot (0) = J \end{cases}$$

Po uporządkowaniu i podstawieniu wartości liczbowych:

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_{B0} \\ U_{D0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie układu równań: $U_{B0} = 1 \text{ V}$ oraz $U_{D0} = 1 \text{ V}$.

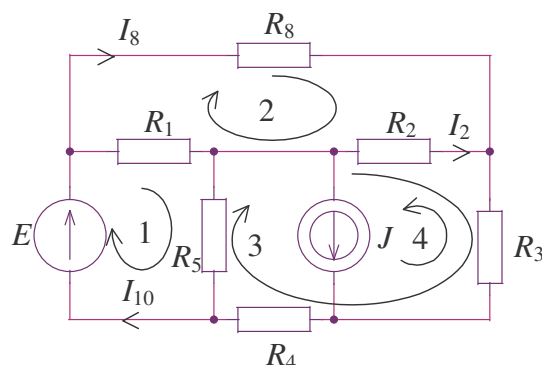
Prąd źródłowy:

$$J_N = I_{zw} = I_3 - I_8 = \frac{U_{B0} - U_{D0}}{R_3} - \frac{E - U_{B0}}{R_8} = 0 - 1 = -1 \text{ A}$$

Poszukiwany prąd (rys. Z1-6b):

$$I_2 = J_N \cdot \frac{R_N}{R_N + R_2} = -1 \cdot \frac{1,167}{1,167 + 1} = -0,539 \text{ A}$$

d) Metodą prądów oczkowych wyznaczmy prądy oczkowe oraz prądy gałęziowe $I_g = I_2$, $I_f = I_8$ oraz I_{10} . Na rys. Z1-7 przedstawiono wybór oczek.



Rys. Z1-7

Prąd oczkowy $I_{44} = J$. Budujemy układ równań wg metody prądów oczkowych

$$\begin{cases} I_{11} \cdot (R_1 + R_5) + I_{22} \cdot (-R_1) + I_{33} \cdot (-R_5) = E \\ I_{11} \cdot (-R_1) + I_{22} \cdot (R_1 + R_2 + R_8) + I_{33} \cdot (-R_2) + J \cdot R_2 = 0 \\ I_{11} \cdot (-R_5) + I_{22} \cdot (-R_2) + I_{33} \cdot (R_2 + R_3 + R_4 + R_5) + J \cdot (-R_2 - R_3) = 0 \end{cases}$$

Po uporządkowaniu i podstawieniu wartości liczbowych:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{11} \\ I_{22} \\ I_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Prądy oczkowe: $I_{11} = 1,923 \text{ A}$, $I_{22} = 0,692 \text{ A}$, $I_{33} = 1,154 \text{ A}$.

Prądy gałęziowe:

$$I_2 = I_{33} - J - I_{22} = -0,538 \text{ A}$$

$$I_8 = I_{22} = 0,692 \text{ A}$$

$$I_{10} = I_{11} = 1,923 \text{ A}$$

e) Metodą potencjałów węzłowych wyznaczmy potencjały oraz prądy $I_g = I_2$, $I_f = I_8$ oraz I_{10} . Oznaczenia węzłów podano na rys. Z1-2. Przy układaniu równań uwzględniamy, że $U_{A0} = E$.

$$\begin{cases} U_{B0} \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_5} \right) + U_{C0} \cdot \left(-\frac{1}{R_2} \right) + E \cdot \left(-\frac{1}{R_1} \right) = -J \\ U_{B0} \cdot \left(-\frac{1}{R_2} \right) + U_{C0} \cdot \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_8} \right) + U_{D0} \cdot \left(-\frac{1}{R_3} \right) + E \cdot \left(-\frac{1}{R_8} \right) = 0 \\ U_{C0} \cdot \left(-\frac{1}{R_3} \right) + U_{D0} \cdot \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \right) = J \end{cases}$$

Po uporządkowaniu i podstawieniu wartości liczbowych:

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_{B0} \\ U_{C0} \\ U_{D0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Potencjały węzłowe: $U_{B0} = 0,769 \text{ V}$, $U_{C0} = 1,308 \text{ V}$, $U_{D0} = 1,154 \text{ V}$.

Prądy gałęziowe:

$$I_2 = \frac{U_{B0} - U_{C0}}{R_2} = -0,538 \text{ A} \quad I_8 = \frac{E - U_{C0}}{R_8} = 0,692 \text{ A} \quad I_{10} = I_8 + \frac{E - U_{B0}}{R_1} = 1,923 \text{ A}$$

f) Obliczymy sumę mocy rezystorów i źródeł.

Prądy I_2 oraz I_8 zostały obliczone poprzednio. Po wyrażeniu prądów pozostałych rezystorów poprzez prądy oczkowe obliczamy sumę ich mocy:

$$\begin{aligned} P_R &= (I_{11} - I_{22})^2 \cdot R_1 + I_2^2 \cdot R_2 + (I_{33} - J)^2 \cdot R_3 + I_{33}^2 \cdot R_4 + (I_{33} - I_{11})^2 \cdot R_5 + I_8^2 \cdot R_8 = \\ &= 1,231^2 + 0,538^2 + 0,154^2 + 1,154^2 + 0,769^2 + 0,692^2 = 4,231 \text{ W} \end{aligned}$$

Suma mocy źródeł:

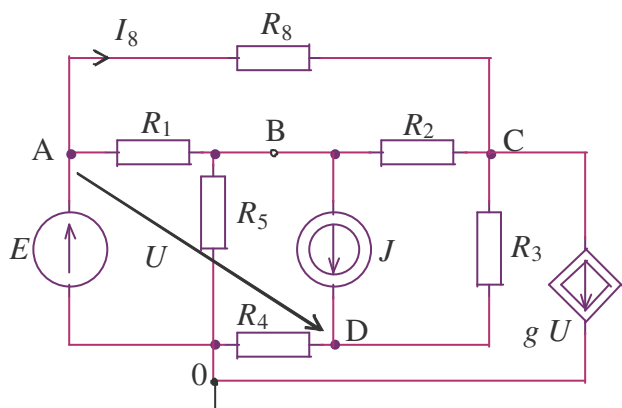
$$P_{EJ} = E \cdot I_{10} + (U_{D0} - U_{B0}) \cdot J = 2 \cdot 1,923 + 0,385 \cdot 1 = 4,231 \text{ W}$$

Stwierdzamy realizację bilansu mocy.

ZESTAWIENIE WYNIKÓW:

wariant nr 57									
U_{B0}	U_{C0}	U_{D0}	E_T	R_T	I_f	J_N	R_N	I_g	I_{10}
V	V	V	V	Ω	A	A	Ω	A	A
0,769	1,308	1,154	1,286	0,857	0,692	-1,000	1,167	-0,539	1,923

2. Przykład rozwiązania zadania kontrolnego nr 2 (wariant 57)



Rys. 2-2

Modyfikacja schematu z zadania nr 1 polega na dodaniu w gałęzi $d=9$ źródła $g \cdot U$ sterowanego napięciem U na gałęzi $c=7$, przy zachowaniu kierunków podanych na rys.2-1. W efekcie otrzymujemy obwód przedstawiony na rys. 2-2.

Parametry elementów:

$$E = 2 \text{ V} \quad J = 1 \text{ A}$$

$$R_k = 1 \Omega \quad (k = 1,2,3,4,5,8)$$

$$g = 0,6 \text{ S}$$

my potencjały oraz prąd $I_f = I_8$.

Oznaczenia węzłów podano na rys. Z2-2. Przy układaniu równań uwzględniamy, że $U_{A0} = E$.

$$\left\{ \begin{array}{l} U_{B0} \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_5} \right) + U_{C0} \cdot \left(-\frac{1}{R_2} \right) + E \cdot \left(-\frac{1}{R_1} \right) = -J \\ U_{B0} \cdot \left(-\frac{1}{R_2} \right) + U_{C0} \cdot \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_8} \right) + U_{D0} \cdot \left(-\frac{1}{R_3} \right) + E \cdot \left(-\frac{1}{R_8} \right) = -g \cdot U \\ U_{C0} \cdot \left(-\frac{1}{R_3} \right) + U_{D0} \cdot \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \right) = J \\ U = U_{D0} - E \end{array} \right.$$

Po uporządkowaniu otrzymujemy układ równań względem potencjałów:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_5} & -\frac{1}{R_2} & 0 \\ -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_8} & -\frac{1}{R_3} + g \\ 0 & -\frac{1}{R_3} & \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_{B0} \\ U_{C0} \\ U_{D0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -J + \frac{E}{R_1} \\ \frac{E}{R_8} + g \cdot E \\ J \end{bmatrix}$$

Po podstawieniu wartości liczbowych:

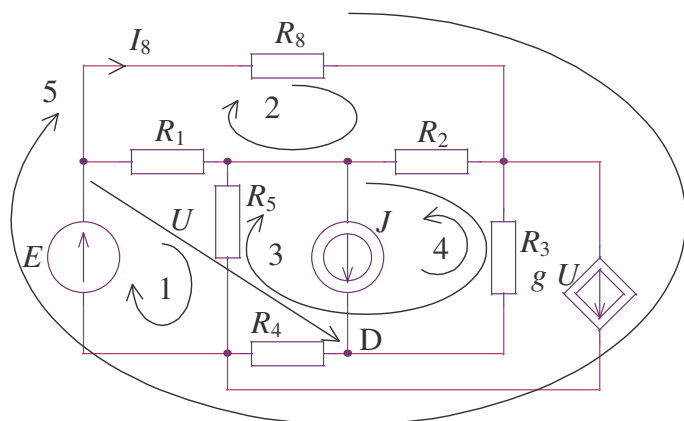
$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -0,4 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_{B0} \\ U_{C0} \\ U_{D0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3,2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Potencjały węzłowe: $U_{B0} = 0,838 \text{ V}$, $U_{C0} = 1,514 \text{ V}$, $U_{D0} = 1,257 \text{ V}$.

Prąd I_8 :

$$I_8 = \frac{E - U_{C0}}{R_8} = 0,486 \text{ A}$$

b) Metodą prądów oczkowych wyznaczmy prąd $I_f = I_8$.



Rys. Z2-3

Na rys. Z2-3 przedstawiono wybór oczek.

Prądy oczek zawierających źródła prądowe:

$$I_{44} = J \quad I_{55} = g U$$

Budujemy układ równań wg metody prądów oczkowych:

$$\begin{cases} I_{11} \cdot (R_1 + R_5) + I_{22} \cdot (-R_1) + I_{33} \cdot (-R_5) = E \\ I_{11} \cdot (-R_1) + I_{22} \cdot (R_1 + R_2 + R_8) + I_{33} \cdot (-R_2) + J \cdot R_2 + g \cdot U \cdot R_8 = 0 \\ I_{11} \cdot (-R_5) + I_{22} \cdot (-R_2) + I_{33} \cdot (R_2 + R_3 + R_4 + R_5) + J \cdot (-R_2 - R_3) = 0 \\ U = I_{33} \cdot R_4 - E \end{cases}$$

Po uporządkowaniu otrzymujemy układ równań względem prądów oczkowych:

$$\begin{bmatrix} R_1 + R_5 & -R_1 & -R_5 \\ -R_1 & R_1 + R_2 + R_8 & -R_2 + g \cdot R_4 \cdot R_8 \\ -R_5 & -R_2 & R_2 + R_3 + R_4 + R_5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{11} \\ I_{22} \\ I_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E \\ -J \cdot R_2 + g \cdot E \cdot R_8 \\ J \cdot (R_2 + R_3) \end{bmatrix}$$

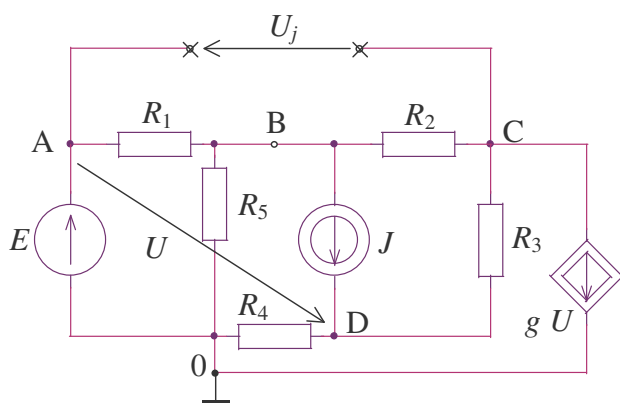
Po podstawieniu wartości liczbowych:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -0,4 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{11} \\ I_{22} \\ I_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0,2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Prądy oczkowe: $I_{11} = 2,095 \text{ A}$, $I_{22} = 0,932 \text{ A}$, $I_{33} = 1,257 \text{ A}$.

Poszukiwany prąd gałęziowy $I_8 = I_{22} + g U = I_{22} + g (I_{33} R_4 - E) = 0,486 \text{ A}$.

c) Metodą Thevenina wyznaczmy prąd $I_f = I_8$.



Rys. Z2-4

Wyznaczać będziemy parametry zastępcze E_T oraz R_T dwójnika przedstawionego (w stanie jałowym) na rys. Z2-4.

Przy obliczaniu napięcia stanu jałowego U_j posłużymy się metodą potencjałów węzłowych. Można wykorzystać układ równań otrzymany w punkcie a. Odłączenie rezystora R_8 jest równoważne przyjęciu, że $1/R_8 = 0$:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_5} & -\frac{1}{R_2} & 0 \\ -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} & -\frac{1}{R_3} + g \\ 0 & -\frac{1}{R_3} & \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_{B0} \\ U_{C0} \\ U_{D0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -J + \frac{E}{R_1} \\ g \cdot E \\ J \end{bmatrix}$$

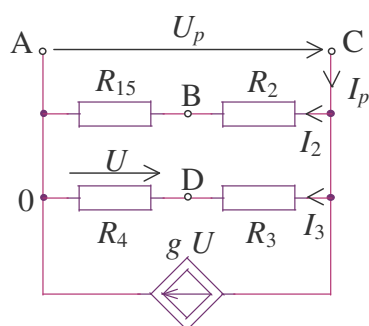
Po podstawieniu wartości liczbowych:

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -0,4 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_{B0} \\ U_{C0} \\ U_{D0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1,2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Potencjał węzła C: $U_{C0} = 1,182 \text{ V}$.

Napięcie źródłowe $E_T = U_j = E - U_{C0} = 0,818 \text{ V}$.

W celu wyznaczenia rezystancji przedstawimy (rys. Z2-5) dwójnik zastępowany po uwzględnieniu zerowych wartości wymuszeń oraz równoległego połączenia rezystorów R_1 i R_5 .



Rys. Z2-5

Rezystancję równoważną wyznaczymy metodą wielkości proporcjonalnych. Po założeniu wartości napięcia sterującego obliczamy pozostałe odpowiedzi:

$$U = 1 \text{ V} \quad I_3 = \frac{U}{R_4} = 1 \text{ A} \quad U_p = I_3 \cdot (R_3 + R_4) = 2 \text{ V}$$

$$I_2 = \frac{U}{R_{15} + R_2} = \frac{2}{0,5 + 1} = 1,333 \text{ A}$$

$$I_p = I_2 + I_3 + g \cdot U = 1,333 + 1 + 0,6 = 2,933 \text{ A}$$

$$R_T = \frac{U_p}{I_p} = 0,682 \text{ A}$$

Po obliczeniu parametrów dwójnika równoważnego obliczamy prąd I_8 (rys.Z1-5b):

$$I_8 = \frac{E_T}{R_T + R_8} = \frac{0,818}{0,682 + 1} = 0,486 \text{ A}$$

ZESTAWIENIE WYNIKÓW:

wariant nr 57					
U_{B0}	U_{C0}	U_{D0}	E_T	R_T	I_f
V	V	V	V	Ω	A
0,838	1,514	1,257	0,818	0,682	0,486

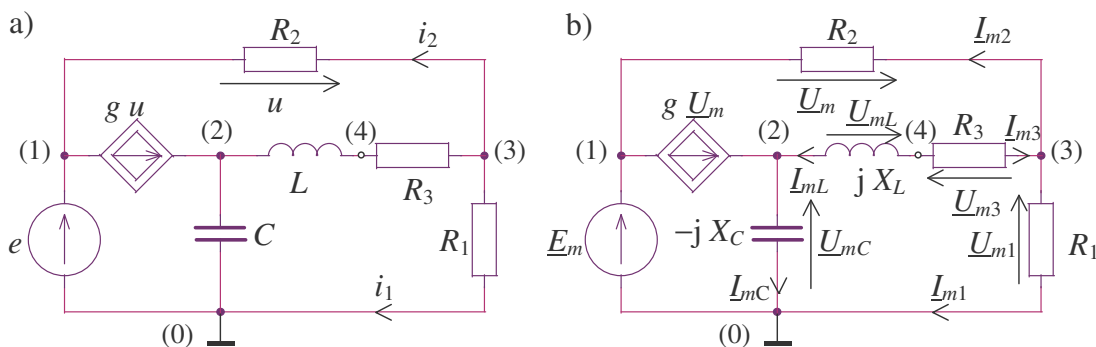
3. Przykład rozwiązania zadania kontrolnego nr 3 (wariant 114)

Z tabeli Z3-1 dla wariantu nr 114 odczytujemy numery par węzłów:

ab	cd	ef	gh	kl	mn	pr
30	31	43	42	20	31	12

do których dołączone są poszczególne elementy: 30(R_1), 31(R_2), 43(R_3), 42(L), 20(C), 31(u), 12(gu). Węzeł wewnętrzny (nr 4) związany jest wyłącznie z elementami R_3 i L , dlatego tworzą one połączenie szeregowe (dołączone do węzłów 3 i 2).

Schemat odpowiedniego obwodu przedstawiono na rys. Z3-3a.



Rys. Z3-3

Dane: $e(t) = E_m \sin(2\pi f t)$, $E_m = 10 \text{ V}$, $f = 1 \text{ kHz}$
 $R_1 = R_2 = R_3 = 1 \text{ k}\Omega$, $L = 0,2 \text{ H}$, $C = 0,1 \text{ }\mu\text{F}$, $g = 0,5 \text{ mS}$

Z uwagi na zakres wartości liczbowych dalsze obliczenia zostaną przeprowadzone z użyciem spójnego układu jednostek: V, k Ω , mS, mA, H, μF , kHz, ms.

Na rys. Z3-3b umieszczono schemat symboliczny analizowanego obwodu z następującymi parametrami (dla pulsacji wymuszenia $\omega = 2\pi f = 6,283 \text{ rad/ms}$):

$$\underline{E}_m = 10 \text{ V}, \quad X_L = \omega L = 1,257 \text{ k}\Omega, \quad X_C = 1/\omega C = 1,592 \text{ k}\Omega$$

1. Analiza obwodu metodą potencjałów węzłowych.

Budujemy równania względem potencjałów uwzględniając $\underline{U}_{m10} = \underline{E}_m$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{U}_{m20} \cdot \left(\frac{1}{-j \cdot X_C} + \frac{1}{R_3 + j \cdot X_L} \right) + \underline{U}_{m30} \cdot \left(\frac{-1}{R_3 + j \cdot X_L} \right) = g \cdot \underline{U}_m \\ \underline{U}_{m20} \cdot \left(\frac{-1}{R_3 + j \cdot X_L} \right) + \underline{U}_{m30} \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3 + j \cdot X_L} \right) + \underline{E}_m \cdot \left(\frac{-1}{R_2} \right) = 0 \\ \underline{U}_m = \underline{U}_{m30} - \underline{E}_m \end{array} \right.$$

Po uporządkowaniu:

$$\begin{bmatrix} j \cdot \frac{1}{X_C} + \frac{1}{R_3 + j \cdot X_L} & \frac{-1}{R_3 + j \cdot X_L} - g \\ \frac{-1}{R_3 + j \cdot X_L} & \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3 + j \cdot X_L} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_{m20} \\ \underline{U}_{m30} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -g \cdot \underline{E}_m \\ \underline{E}_m / R_2 \end{bmatrix}$$

Po wprowadzeniu danych liczbowych:

$$\begin{bmatrix} 0,388 + j \cdot 0,141 & -0,888 + j \cdot 0,487 \\ -0,388 + j \cdot 0,487 & 2,388 - j \cdot 0,487 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_{m20} \\ \underline{U}_{m30} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Rozwiązaniem układu równań są wartości:

$$\underline{U}_{m20} = (-3,327 + j \cdot 0,140) \text{ V} = 3,330 \cdot e^{j177,6^\circ} \text{ V}$$

$$\underline{U}_{m30} = (3,392 + j \cdot 1,394) \text{ V} = 3,667 \cdot e^{j22,3^\circ} \text{ V}$$

a) Wyznaczenie amplitud zespolonych poszukiwanych prądów:

$$\underline{I}_{m1} = \frac{\underline{U}_{m30}}{R_1} = (3,392 + j \cdot 1,394) = 3,667 \cdot e^{j22,3^\circ} \text{ mA}$$

$$\underline{I}_{m2} = \frac{\underline{U}_{m30} - \underline{E}_m}{R_2} = (-6,608 + j \cdot 1,394) = 6,754 \cdot e^{j168,1^\circ} \text{ mA}$$

Równania wartości chwilowych: $i_1(t) = 3,667 \sin(2\pi f t + 22,3^\circ) \text{ mA}$

$i_2(t) = 6,754 \sin(2\pi f t + 168,1^\circ) \text{ mA}$

b) Dla wykonania wykresu wskazowego należy wykonać dodatkowe obliczenia:

$$\underline{I}_{m3} = \frac{\underline{U}_{m20} - \underline{U}_{m30}}{R_3 + j \cdot X_L} = (-3,216 + j \cdot 2,788) \text{ mA} = 4,256 \cdot e^{j139,1^\circ} \text{ mA} = -\underline{I}_{mL}$$

$$\underline{U}_{m40} = \underline{U}_{m30} + \underline{I}_{m3} \cdot R_1 = (0,176 + j \cdot 4,180) \text{ V} = 4,185 \cdot e^{j87,6^\circ} \text{ V}$$

$$\underline{U}_m = \underline{I}_{m2} \cdot R_2 = (-6,608 + j \cdot 1,394) \text{ V} = 6,754 \cdot e^{j168,1^\circ} \text{ V}$$

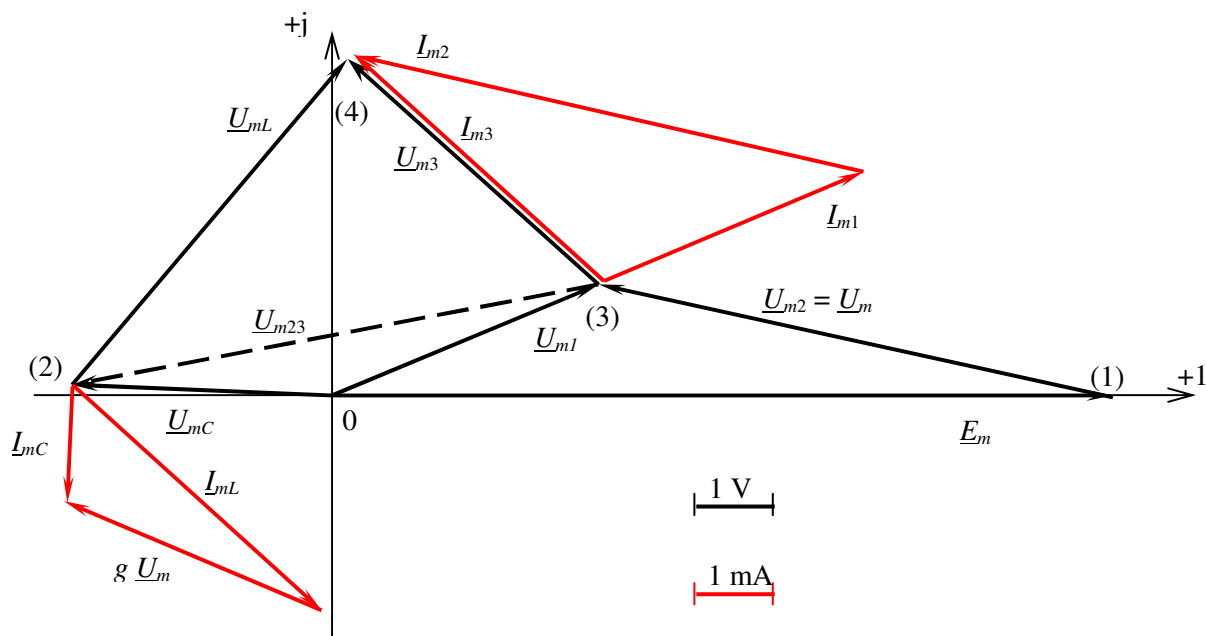
$$g \cdot \underline{U}_m = (-3,304 + j \cdot 0,697) \text{ mA} = 3,377 \cdot e^{j168,1^\circ} \text{ mA}$$

$$\underline{I}_{mC} = \frac{\underline{U}_{m20}}{-j \cdot X_C} = (-0,088 - j \cdot 2,091) \text{ mA} = 2,093 \cdot e^{-j92,4^\circ} \text{ mA}$$

Po wyborze skali tworzymy wykres wskazowy (rys. Z3-4). Liczby w nawiasach umieszczono w pobliżu punktów, których położenie na płaszczyźnie zmiennej zespolonej jest określone przez potencjały odpowiednich węzłów. Na wykresie znajdują się trójkąty ilustrujące spełnienie I PK

w węźle (2): $\underline{I}_{mL} + g \cdot \underline{U}_m - \underline{I}_{mC} = 0$

i w węźle (3): $\underline{I}_{m3} - \underline{I}_{m2} - \underline{I}_{m1} = 0$



Rys. Z3-4

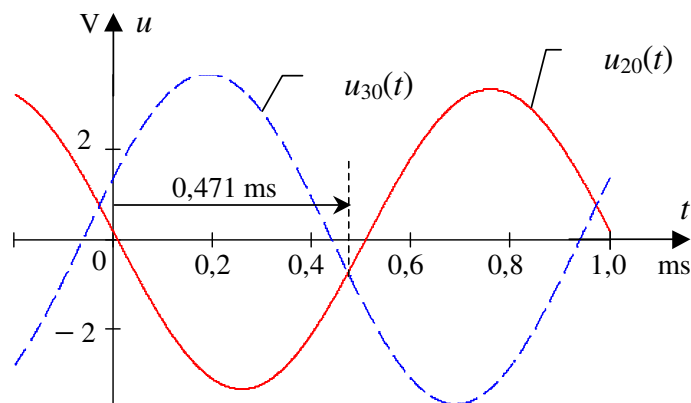
Jeden z wierzchołków trójkąta znajduje się w punkcie określonym przez potencjał odpowiedniego węzła.

c) Na rys. Z3-5 przedstawiono przebiegi:

$$u_{20}(t) = 3,330 \sin(2\pi f t + 177,6^\circ) \text{ V}$$

$$u_{30}(t) = 3,667 \sin(2\pi f t + 22,3^\circ) \text{ V}$$

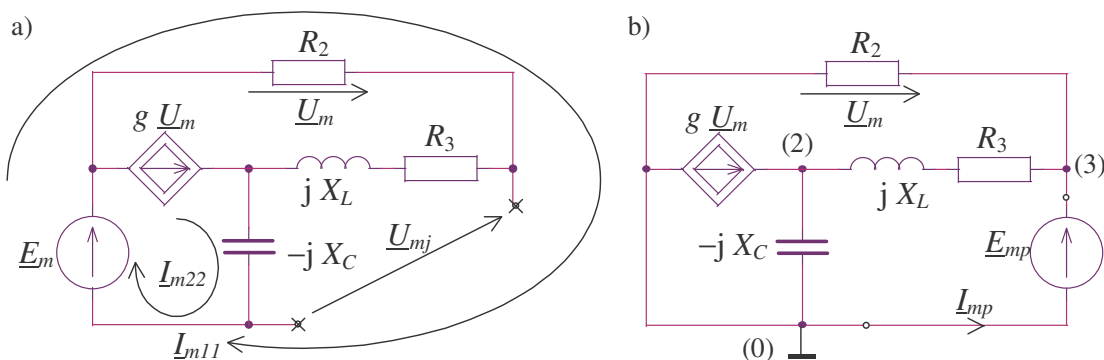
oraz oznaczono moment (pierwszy po $t = 0$), w którym wartości chwilowe potencjałów węzłów 2 i 3 są jednokowe. Oprócz tego (zgodnie z treścią zadania) moment ten należy wyznaczyć analitycznie (tutaj sposób ten został pominięty, podano natomiast na rysunku wynik obliczeń).



Rys. Z3-5

2. Wyznamy amplitudę zespoloną prądu I_{m1} metodą Thevenina.

Poszukiwany prąd płynie przez rezystor R_1 (rys.Z3-3b). Dwójnik, do którego dołączony jest R_1 przedstawiono (w stanie jałowym) na rys. Z3-6a.



Rys. Z3-6

Napięcie źródłowe \underline{E}_{mT} jest równe napięciu w stanie jałowym dwójnika \underline{U}_{mj} . Do wyznaczenia tego napięcia posłużymy się metodą prądów oczkowych. Bez źródła prądu (sterowanego) obwód zawiera jedno oczko z prądem I_{m11} . Prąd drugiego oczka $I_{m22} = g \underline{U}_m$.

$$\begin{cases} I_{m11} \cdot (R_2 + R_3 + j \cdot X_L - j \cdot X_C) + g \cdot \underline{U}_m \cdot (-j \cdot X_C) = \underline{E}_m \\ \underline{U}_m = -I_{m11} \cdot R_2 \end{cases}$$

Prąd pierwszego oczka:

$$I_{m11} = \frac{\underline{E}_m}{R_2 + R_3 + j \cdot [X_L - X_C \cdot (1 - g \cdot R_2)]} = (4,748 - j \cdot 1,094) \text{ mA}$$

Napięcie źródłowe \underline{E}_{mT} :

$$\underline{E}_{mT} = \underline{U}_{mj} = \underline{E}_m - \underline{I}_{m11} \cdot R_2 = (5,252 + j \cdot 1,094) \text{ V} = 5,365 \cdot e^{j11,8^\circ} \text{ V}$$

W celu wyznaczenia impedancji \underline{Z}_T do dwójnika bez wymuszeń ($\underline{E}_m = 0$) dołączamy pomocnicze źródło napięcia $\underline{E}_{mp} = 1 \text{ V}$ (rys. Z.3-6b). Prąd \underline{I}_{mp} wyznaczmy metodą potencjałów węzłowych. Potencjał węzła (3) jest wymuszany $\underline{U}_{m30} = \underline{E}_{mp}$. Zapisujemy jedno równanie względem potencjału węzła (2)

$$\begin{cases} \underline{U}_{m20} \cdot \left(\frac{1}{-j \cdot X_C} + \frac{1}{R_3 + j \cdot X_L} \right) + \underline{E}_{mp} \cdot \left(\frac{-1}{R_3 + j \cdot X_L} \right) = g \cdot \underline{U}_m \\ \underline{U}_m = \underline{E}_{mp} \end{cases}$$

Potencjał węzła (2):

$$\underline{U}_{m20} = \frac{-j \cdot X_C \cdot [g \cdot (R_3 + j \cdot X_L) + 1]}{R_3 + j \cdot X_L - j \cdot X_C} \cdot \underline{E}_{mp} = (1,619 - j \cdot 1,846) \text{ V}$$

Prąd płynący przez źródło pomocnicze:

$$\underline{I}_{mp} = \frac{\underline{U}_{m20}}{-j \cdot X_C} - g \cdot \underline{U}_m + \frac{\underline{E}_{mp}}{R_2} = \frac{\underline{U}_{m20}}{-j \cdot X_C} + \underline{E}_{mp} \cdot \left(\frac{1}{R_2} - g \right) = (1,659 + j \cdot 1,017) \text{ mA}$$

Impedancja dwójnika:

$$\underline{Z}_T = \frac{\underline{E}_{mp}}{\underline{I}_{mp}} = (0,4381 - j \cdot 0,2685) \text{ k}\Omega = 0,514 \cdot e^{-j31,5^\circ} \text{ k}\Omega$$

Poszukiwany prąd (zgodnie z wartością otrzymaną w p.1a):

$$\underline{I}_{m1} = \frac{\underline{E}_{mT}}{\underline{Z}_T + R_1} = (3,392 + j \cdot 1,394) \text{ mA}$$

ZESTAWIENIE WYNIKÓW:

wariant nr 114

1. a) $i_1(t) = 3,667 \sin(2\pi f t + 22,3^\circ) \text{ mA}$
 $i_2(t) = 6,754 \sin(2\pi f t + 168,1^\circ) \text{ mA}$

b)

$$\underline{U}_{m40} = (0,176 + j \cdot 4,180) \text{ V} = 4,185 \cdot e^{j87,6^\circ} \text{ V}$$

$$\underline{I}_{mL} = (3,216 - j \cdot 2,788) \text{ mA} = 4,256 \cdot e^{-j40,9^\circ} \text{ mA}$$

$$\underline{I}_{mC} = (-0,088 - j \cdot 2,091) \text{ mA} = 2,093 \cdot e^{-j92,4^\circ} \text{ mA}$$

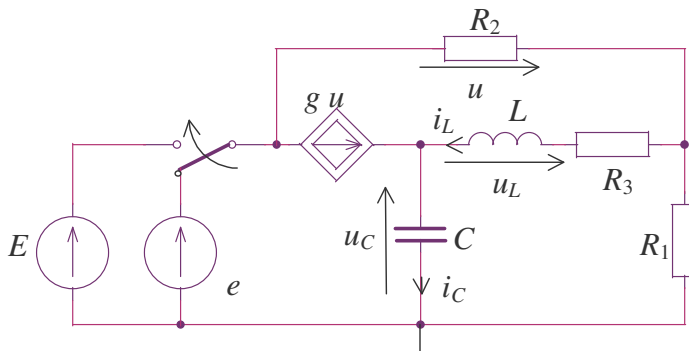
c) $u_{20}(t) = 3,330 \sin(2\pi f t + 177,6^\circ) \text{ V}$
 $u_{30}(t) = 3,667 \sin(2\pi f t + 22,3^\circ) \text{ V}$
 $t = 0,471 \text{ ms}$

2) $\underline{E}_{mT} = (5,252 + j \cdot 1,094) \text{ V} = 5,365 \cdot e^{j11,8^\circ} \text{ V}$

$$\underline{Z}_T = (0,4381 - j \cdot 0,2685) \text{ k}\Omega = 0,514 \cdot e^{-j31,5^\circ} \text{ k}\Omega$$

4. Przykład rozwiązania zadania kontrolnego nr 4 (wariant 114)

Komutacja wynikająca z treści zadania została przedstawiona w obwodzie na rys. Z4-1 jako przełączenie zasilania obwodu ze źródła napięcia sinusoidalnego e na źródło napięcia stałego E .



Rys. Z4-1

Poszukiwane wartości początkowe odpowiedzi oraz ich pierwszych pochodnych zostaną obliczone z zastosowaniem metody przedstawionej w podrozdziale 6.3.

1. Wyznaczenie warunków początkowych.

Z analizy stanu ustalonego przed komutacją dla $t < 0$ (zadanie kontrolne nr 3) uzyskaliśmy:

$$i_L(t) = 4,256 \sin(2\pi f t - 40,9^\circ) \text{ mA}$$

$$u_C(t) = u_{20}(t) = 3,330 \sin(2\pi f t + 177,6^\circ) \text{ V}$$

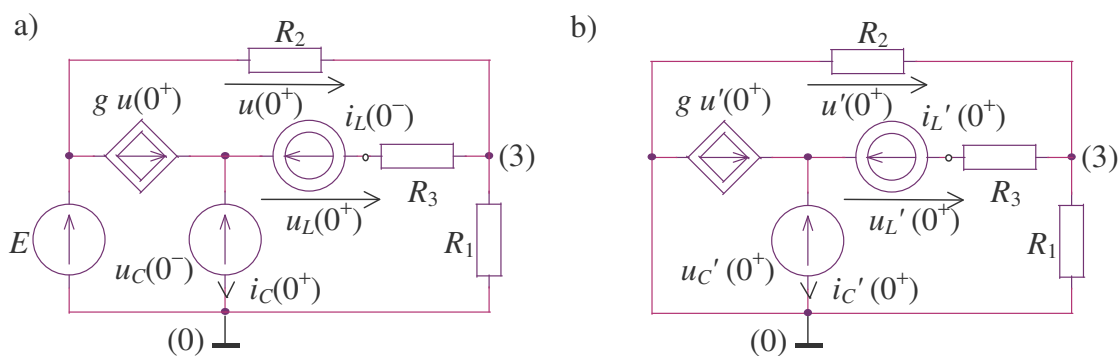
Wartości końcowe tych funkcji określają warunki początkowe:

$$i_L(0^-) = 4,256 \sin(-40,9^\circ) \text{ V} = -2,788 \text{ mA}$$

$$u_C(0^-) = 3,330 \sin(177,6^\circ) \text{ V} = 0,140 \text{ V}$$

2. Wyznaczenie wartości początkowych odpowiedzi.

Zadanie wykonamy posługując się schematem zastępczym umieszczonym na rys. Z4-2a.



Rys. Z4-2

Z metody potencjałów węzłowych wynika równanie:

$$u_{30}(0^+) \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) + E \cdot \left(-\frac{1}{R_2} \right) = -i_L(0^-)$$

z którego obliczamy $u_{30}(0^+) = 6,394 \text{ V}$.

Napięcie sterujące ŻPSN:

$$u(0^+) = u_{30}(0^+) - E = -3,606 \text{ V}$$

Poszukiwane wartości wynikają z praw Kirchhoffa:

$$u_L(0^+) = u_{30}(0^+) - R_3 \cdot i_L(0^-) - u_C(0^-) = 9,042 \text{ V}$$

$$i_C(0^+) = g \cdot u(0^+) + i_L(0^-) = -4,591 \text{ mA}$$

3. Wyznaczenie wartości początkowych pochodnych odpowiedzi.

Schemat zastępczy ilustrujący związki między pierwszymi pochodnymi odpowiedzi pokazany jest na rys. Z4-2b. Parametry wymuszeń działających w tym obwodzie obliczamy wg wzorów podanych w tabeli 6.3-1:

$$i'_L(0^+) = \frac{u_L(0^+)}{L} = 45,21 \frac{\text{mA}}{\text{ms}}$$

$$u'_C(0^+) = \frac{i_C(0^+)}{C} = -45,91 \frac{\text{V}}{\text{ms}}$$

Z metody potencjałów węzłowych wynika równanie:

$$u'_{30}(0^+) \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = -i'_L(0^+)$$

z którego obliczamy pochodną $u'_{30}(0^+) = -22,60 \text{ V/ms}$.

Pochodna napięcia sterującego ŻPSN:

$$u'(0^+) = u'_{30}(0^+) = -22,60 \frac{\text{V}}{\text{ms}}$$

Poszukiwane wartości wynikają z praw Kirchhoffa:

$$u'_L(0^+) = u'_{30}(0^+) - R_3 \cdot i'_L(0^+) - u'_C(0^+) = -21,91 \frac{\text{V}}{\text{ms}}$$

$$i'_C(0^+) = g \cdot u'(0^+) + i'_L(0^+) = 33,91 \frac{\text{mA}}{\text{ms}}$$

ZESTAWIENIE WYNIKÓW:

wariant nr 114

$$u_L(0^+) = 9,042 \text{ V}$$

$$i_C(0^+) = -4,591 \text{ mA}$$

$$u'_L(0^+) = -21,91 \frac{\text{V}}{\text{ms}}$$

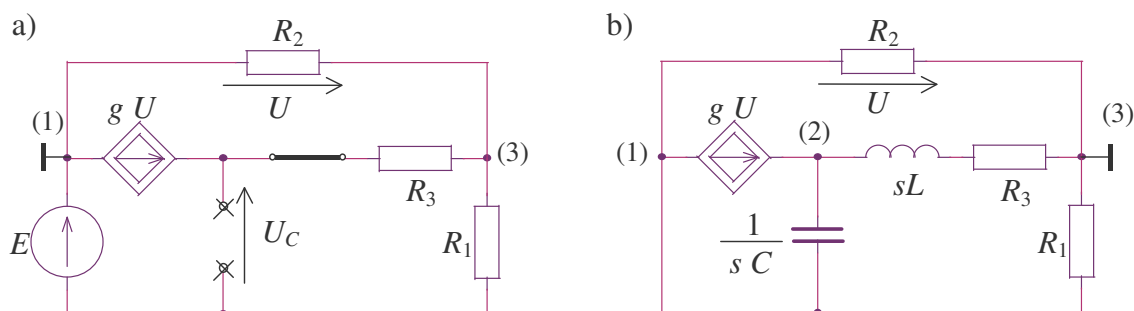
$$i'_C(0^+) = 33,91 \frac{\text{mA}}{\text{ms}}$$

5. Przykład rozwiązania zadania kontrolnego nr 5 (wariant 114)

Zadanie polegające na wyznaczeniu przebiegów napięć $u_C(t)$ oraz $u_L(t)$ po komutacji w obwodzie przedstawionym na rys. Z4-1 rozwiążemy wg planu opisanego w podrozdziale 6.8.

a) Wyznaczenie składowych ustalonych.

Dla stanu ustalonego przy wymuszeniu stałym można utworzyć schemat zastępczy pokazany na rys. Z5-1a.



Rys. Z.5-1

Po przyjęciu węzła (1) za węzeł odniesienia z metody potencjałów węzłowych wynika:

$$U_{31} \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = -\frac{E}{R_1} + g \cdot U$$

przy czym: $U = U_{31}$. W wyniku rozwiązania równania otrzymujemy: $U = U_{31} = -6,667 \text{ V}$.

Z II PK składowa ustalona napięcia na kondensatorze:

$$U_C = g \cdot U \cdot R_3 + \left(g \cdot U - \frac{U}{R_2} \right) \cdot R_1 = 0 \text{ V}$$

Składowa stała napięcia na cewce, jak zawsze w stanie ustalonym, $U_L = 0$.

b) Utworzenie równania charakterystycznego.

Zadanie zrealizujemy metodą wyznacznika głównego (p.6.6.2). Schemat zastępczy obwodu bez wymuszeń dla przebiegów wykładniczych przedstawiono na rys. Z5-1b. Po przyjęciu węzła 3 za węzeł odniesienia równania metody potencjałów węzłowych przybierają postać:

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + s \cdot C \right) \cdot U_{13} + (-s \cdot C) \cdot U_{23} = -g \cdot U \\ (-s \cdot C) \cdot U_{13} + \left(s \cdot C + \frac{1}{s \cdot L + R_3} \right) \cdot U_{23} = g \cdot U \\ U = -U_{13} \end{cases}$$

Po uporządkowaniu, w postaci macierzowej:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} - g + s \cdot C & -s \cdot C \\ -s \cdot C + g & s \cdot C + \frac{1}{s \cdot L + R_3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_{13} \\ U_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Podstawiamy dane liczbowe (stosujemy spójny podukład jednostek: V, kΩ, mS, mA, H, μF, kHz, ms) i przyrównujemy wyznacznik głównej macierzy admitancji węzłowych do zera:

$$\begin{vmatrix} 1,5 + 0,1 \cdot s & -0,1 \cdot s \\ 0,5 - 0,1 \cdot s & 0,1 \cdot s + \frac{1}{0,2s + 1} \end{vmatrix} = 0$$

Po obliczeniu wyznacznika i pomnożeniu stron równania przez $25 \cdot (0,2s + 1)$ otrzymujemy równanie charakterystyczne:

$$s^2 + 7,5 \cdot s + 37,5 = 0$$

które posiada parę zespoloną pierwiastków:

$$s_{1,2} = \sigma + j \cdot \omega = (-3,75 \pm j \cdot 4,841) \frac{1}{\text{ms}}$$

c) Obliczenie stałych występujących w składowych przejściowych.

Podpunkty α i β ogólnego algorytmu zostały zrealizowane w zadaniu 4. Przystępujemy do czynności przewidzianych w podpunkcie γ . W przypadku pierwiastków zespolonych można poszukiwać stałych zespolonych występujących w zapisie wykładniczym odpowiedzi (p.6.8.2) lub stałych rzeczywistych znajdujących się w odpowiedzi przedstawionej jako funkcja harmoniczna o wykładniczo zmieniającej się amplitudzie (p.6.8.3). Przy wyznaczaniu przebiegu $u_C(t)$ posłużymy się pierwszym wariantem, a drugim przy obliczaniu $u_L(t)$.

1) Napięcie $u_C(t)$ można przedstawić w postaci (6.8-3):

$$u_C(t) = U_C + A_1 \cdot e^{s_1 t} + A_2 \cdot e^{s_2 t}$$

a stałe A_1 i A_2 wyznaczyć poprzez rozwiązanie układu równań (6.8-4):

$$\begin{cases} u_C(0^+) = U_C + A_1 + A_2 \\ u'_C(0^+) = s_1 \cdot A_1 + s_2 \cdot A_2 \end{cases}$$

Po podstawieniu poprzednio uzyskanych wartości:

$$\begin{cases} 0,140 = 0 + A_1 + A_2 \\ -45,91 = (-3,75 + j \cdot 4,841) \cdot A_1 + (-3,75 - j \cdot 4,841) \cdot A_2 \end{cases}$$

Rozwiązaniem układu równań są:

$$A_1 = 0,070 + j \cdot 4,688 = 4,688 \cdot e^{j89,1^\circ} = |A_1| \cdot e^{j\alpha}$$

$$A_2 = 0,070 - j \cdot 4,688 = A_1^*$$

Wynik końcowy zapisujemy w postaci (6.8-7):

$$u_C(t) = U_C + 2 \cdot |A_1| \cdot e^{\sigma t} \cdot \cos(\omega \cdot t + \alpha) = 9,376 \cdot e^{-3,75t} \cdot \cos(4,841 \cdot t + 89,1^\circ) \text{ V}$$

2) Stałe występujące w równaniu napięcia $u_L(t)$ w postaci:

$$u_L(t) = U_L + B \cdot e^{\sigma t} \cdot \cos(\omega \cdot t + \beta)$$

wyznamy poprzez rozwiązanie układu równań:

$$\begin{cases} u_L(0^+) = U_L + B \cdot \cos \beta \\ u'_L(0^+) = \sigma \cdot B \cdot \cos \beta - \omega \cdot B \cdot \sin \beta \end{cases}$$

Po podstawieniu danych liczbowych:

$$\begin{cases} 9,042 = 0 + B \cdot \cos \beta \\ -21,91 = -3,750 \cdot B \cdot \cos \beta - 4,841 \cdot B \cdot \sin \beta \end{cases}$$

rozwiązujemy układ równań: $B = 9,375$, $\beta = -15,3^\circ$

Poszukiwany przebieg:

$$u_L(t) = 9,375 \cdot e^{-3,75t} \cdot \cos(4,841 \cdot t - 15,3^\circ) \text{ V}$$

Należy podkreślić, że końcowe zależności napięć od czasu zapisane są przy założeniu, iż czas występujący w równaniach funkcji $u_C(t)$ oraz $u_L(t)$ podany jest w milisekundach.

ZESTAWIENIE WYNIKÓW:

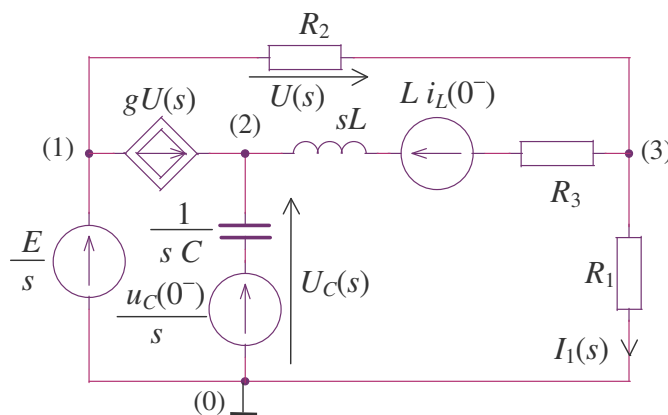
wariant nr 114

$$u_C(t) = 9,376 \cdot e^{-3,75t} \cdot \cos(4,841 \cdot t + 89,1^\circ) \text{ V}$$

$$u_L(t) = 9,375 \cdot e^{-3,75t} \cdot \cos(4,841 \cdot t - 15,3^\circ) \text{ V}$$

6. Przykład rozwiązania zadania kontrolnego nr 6 (wariant 114)

Zadanie polega na wyznaczeniu metodą operatorową przebiegu napięcia $u_C(t)$ oraz prądu $i_1(t)$ po komutacji w obwodzie przedstawionym na rys. Z4-1. Warunki początkowe zostały wyznaczone w zadaniu kontrolnym nr 4: $i_L(0^-) = -2,788 \text{ mA}$, $u_C(0^-) = 0,140 \text{ V}$. Schemat operatorowy obwodu uwzględniający niezerowe warunki początkowe przedstawiono na rys. Z.6-1.



Rys. Z.6-1

Wykorzystując metodę potencjałów węzłowych uzyskujemy równania:

$$\begin{cases} U_{20}(s) \cdot \left(s \cdot C + \frac{1}{R_3 + s \cdot L} \right) + U_{30}(s) \cdot \left(-\frac{1}{R_3 + s \cdot L} \right) = g \cdot U(s) + \frac{L \cdot i_L(0^-)}{R_3 + s \cdot L} + C \cdot u_C(0^-) \\ U_{20}(s) \cdot \left(-\frac{1}{R_3 + s \cdot L} \right) + U_{30}(s) \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3 + s \cdot L} \right) + \frac{E}{s} \cdot \left(\frac{1}{R_2} \right) = -\frac{L \cdot i_L(0^-)}{R_3 + s \cdot L} \\ U(s) = U_{30}(s) - \frac{E}{s} \end{cases}$$

Układ równań względem potencjałów zapisany macierzowo przybiera postać:

$$\begin{bmatrix} s \cdot C + \frac{1}{R_3 + s \cdot L} & -\frac{1}{R_3 + s \cdot L} - g \\ -\frac{1}{R_3 + s \cdot L} & \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3 + s \cdot L} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_{20}(s) \\ U_{30}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -g \cdot \frac{E}{s} + \frac{L \cdot i_L(0^-)}{R_3 + s \cdot L} + C \cdot u_C(0^-) \\ -\frac{E}{s} \cdot \left(\frac{1}{R_2} \right) - \frac{L \cdot i_L(0^-)}{R_3 + s \cdot L} \end{bmatrix}$$

Po podstawieniu danych liczbowych (stosujemy spójny podukład jednostek: V, kΩ, mS, mA, H, μF, kHz, ms) otrzymujemy:

$$\begin{bmatrix} s \cdot 0,1 + \frac{1}{1+s \cdot 0,2} & -\frac{1}{1+s \cdot 0,2} - g \\ -\frac{1}{1+s \cdot 0,2} & 1 + 1 + \frac{1}{1+s \cdot 0,2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_{20}(s) \\ U_{30}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,5 \cdot \frac{10}{s} + \frac{0,2 \cdot (-2,788)}{1+s \cdot 0,2} + 0,1 \cdot 0,14 \\ -\frac{10}{s} \cdot 1 - \frac{0,2 \cdot (-2,788)}{1+s \cdot 0,2} \end{bmatrix}$$

Rozwiązaniem układu równań są transformaty:

$$U_{20}(s) = \frac{0,140 \cdot s - 44,86}{s^2 + 12,5 \cdot s + 37,5} \quad \text{oraz} \quad U_{30}(s) = \frac{6,394 \cdot s^2 + 25,35 \cdot s + 125}{s \cdot (s^2 + 12,5 \cdot s + 37,5)}$$

Dysponując transformatami potencjałów wyznaczamy transformaty poszukiwanych odpowiedzi:

$$U_C(s) = U_{20}(s) = \frac{0,140 \cdot s - 44,86}{s^2 + 12,5 \cdot s + 37,5}$$

$$I_1(s) = \frac{U_{30}(s)}{R_1} = \frac{6,394 \cdot s^2 + 25,35 \cdot s + 125}{s \cdot (s^2 + 12,5 \cdot s + 37,5)}$$

Dla otrzymania rozwiązania w dziedzinie czasu dokonujemy przekształcenia odwrotnego transformat. W odniesieniu do wymiernych funkcji zmiennej zespolonej stosujemy rozkład na ułamki proste.

Transformata $U_C(s)$ posiada dwa bieguny, które wyznaczamy przyrównując jej mianownik do 0. Równanie:

$$s^2 + 7,5 \cdot s + 37,5 = 0$$

pokrywa się z równaniem charakterystycznym obwodu (p. rozwiązanie zad. nr 5) i ma pierwiastki:

$$s_{1,2} = \sigma + j \cdot \omega = -3,75 \pm j \cdot 4,841$$

Po rozkładzie na ułamki proste:

$$U_C(s) = \frac{K_1}{s - s_1} + \frac{K_2}{s - s_2}$$

gdzie:

$$K_1 = U_C(s) \cdot (s - s_1) \Big|_{s=s_1} = \frac{0,140 \cdot s - 44,86}{s^2 + 12,5 \cdot s + 37,5} \cdot (s + 3,75 - j \cdot 4,841) \Big|_{s=-3,75+j \cdot 4,481} = 4,688 \cdot e^{j89,1^\circ} = |K_1| \cdot e^{j\psi}$$

$$K_2 = K_1^*$$

W dziedzinie czasu uzyskujemy:

$$u_C(t) = 2 \cdot |K_1| \cdot e^{\sigma t} \cdot \cos(\omega \cdot t + \psi) = 9,376 \cdot e^{-3,75t} \cdot \cos(4,841 \cdot t + 89,1^\circ) \text{ V}$$

Transformata $I_1(s)$ posiada dodatkowo biegun w zerze dlatego zapisujemy:

$$I_1(s) = \frac{N_0}{s} + \frac{N_1}{s - s_1} + \frac{N_2}{s - s_2}$$

gdzie:

$$N_0 = I_1(s) \cdot s \Big|_{s=0} = 3,333$$

$$N_1 = I_1(s) \cdot (s - s_1) \Big|_{s=s_1} = 1,913 \cdot e^{j36,9^\circ} = |N_1| \cdot e^{j\gamma}$$

Co oznacza rozwiązanie w dziedzinie czasu:

$$i_1(t) = N_0 + 2 \cdot |N_1| \cdot e^{\sigma t} \cdot \cos(\omega \cdot t + \gamma) = 3,333 + 3,826 \cdot e^{-3,75t} \cdot \cos(4,841 \cdot t + 36,9^\circ) \text{ A}$$

Przypomnieć należy, że jednostką czasu w naszym rozwiązaniu jest milisekunda.

ZESTAWIENIE WYNIKÓW:

wariant nr 114

$$u_C(t) = 9,376 \cdot e^{-3,75t} \cdot \cos(4,841 \cdot t + 89,1^\circ) \text{ V}$$

$$i_1(t) = 3,333 + 3,826 \cdot e^{-3,75t} \cdot \cos(4,841 \cdot t + 36,9^\circ) \text{ A}$$